# Pas de titre

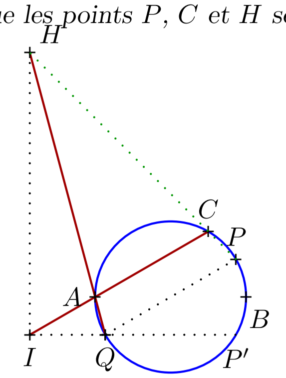
Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

**Exercice 0.1** ★★ **Pas de titre**

*Soient $[AB]$ et $[PQ]$ deux diamètres d'un cercle $\mathcal{C}$. Par le point $A$ on mène la parallèle à $(PQ)$ qui rencontre au point $C$ le cercle et en $I$ la droite joignant le point $Q$ au symétrique $P'$ de $P$ par rapport à $(AB)$. Soit $H$ le point de rencontre de la droite $(AQ)$ et de la perpendiculaire à $(AB)$ menée par le point $I$. Montrer que les points $P$, $C$ et $H$ sont alignés.*




**Solution :** *On choisit un repère orthonormé en sorte que* $A\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $P\begin{vmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{vmatrix}$, $Q\begin{vmatrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{vmatrix}$, $P'\begin{vmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{vmatrix}$. *On cherche $C$ sous la forme* $C = A+\lambda\overrightarrow{OP}\begin{vmatrix}-1+\lambda\cos\theta\\\lambda\sin\theta\end{vmatrix}$ *avec* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Comme* $x_C^2+y_C^2 = 1$, *on trouve* $\lambda = 2\cos\theta$ *et finalement* $\boxed{C\begin{vmatrix}\cos(2\theta)\\\sin(2\theta)\end{vmatrix}}$.

*On cherche ensuite les coordonnées de* $I = A+\lambda\overrightarrow{OP}$ *avec* $y_I = -\sin\theta$ *ce qui donne* $\lambda = -1$ *et* $\boxed{I\begin{vmatrix}-(1+\cos\theta)\\-\sin\theta\end{vmatrix}}$. *Cherchons ensuite les coordonnées de* $H = A+\lambda\overrightarrow{QA}$. *Puisque* $x_H = x_I$, *on* *trouve que* $\lambda = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$ *et ensuite* $\boxed{H\left|\begin{matrix}-(1+\cos\theta)\\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{matrix}\right.}$. *Puisque*

$$\overrightarrow{HQ}\left|\begin{matrix}\cos\theta(2\cos\theta+1)\\ \sin\theta\cos\theta\dfrac{1-2\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{HP}\left|\begin{matrix}2\cos\theta+1\\ \sin\theta\dfrac{1-2\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{matrix}\right.$$

*on voit que ces deux vecteurs sont colinéaires et donc les trois points* $P$, $Q$, $H$ *sont alignés.*

## Références