Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur $]0,+\infty[$ *puis sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$4xy''+2y'-y=0$$

(on posera $t=\sqrt{x}$*)*

Solution : *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $]0,+\infty[$*. Posons* $z(t)=y\left(t^2\right)$*. Comme* y *est deux fois dérivable il en est de même de* z *et on a :*

$$\begin{cases} z(t) & = y\left(t^2\right) \\ z'(t) & = 2ty'\left(t^2\right) \\ z''(t) & = 2y'\left(t^2\right)+4t^2y''\left(t^2\right) \end{cases}.$$

Comme y *est solution de la première équation,* z *est solution de :* $f''-f=0$*. Par conséquent, il existe* $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $z:t\mapsto A\operatorname{ch}t+B\operatorname{sh}t$*. La fonction* y *est alors donnée par :* $y:x\mapsto A\operatorname{ch}(\sqrt{x})+B\operatorname{sh}(\sqrt{x})$*. Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation sur* $]0,+\infty[$*.*
Sur $]-\infty,0[$*, on pose* $x=-t^2$ *et* $z(t)=y\left(t^2\right)$*.*

$$\begin{cases} z(t) & = y\left(-t^2\right) \\ z'(t) & = -2ty'\left(-t^2\right) \\ z''(t) & = -2y'\left(t^2\right)+4t^2y''\left(t^2\right) \end{cases}.$$

Donc $z''(t)=-z(t)$*. Donc il existe* $(A',B')\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $z:t\mapsto A'\operatorname{ch}t+B'\operatorname{sh}t$*. La fonction* y *est alors donnée par :* $y:x\mapsto A'\cos(\sqrt{-x})+B'\sin(\sqrt{-x})$*. Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation sur* $]-\infty,0[$*.*
Pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$*, la continuité en zéro impose* $A=A'$*. La continuité en zéro de la dérivée impose* $B=B'$*. Réciproquement, si on se donne* $(A,B)\in\mathbb{R}^2$*, la fonction* $\psi_{A,B}$ *définie par* $\psi_{A,B}(x)=A\operatorname{ch}(\sqrt{x})+B\operatorname{sh}(\sqrt{x})$ *pour* $x\geqslant 0$ *et* $\psi_{A,B}(x)=A\cos(\sqrt{-x})+B\sin(\sqrt{-x})$ *est solution sur* $\mathbb{R}$*.*

Références