Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \; : y'' + \frac{1}{2x^2} y = 0.$$

1. *Soit y une solution du problème. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $z(t) = y(e^t)\, e^{-\frac{t}{2}}$.*
   (a) *Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour tout $x > 0$.*
   (b) *En déduire que la fonction $t \mapsto z(t)$ vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation (E') d'ordre 2 à coefficients constants.*
   (c) *Résoudre (E').*
2. *Résoudre (E).*

Solution :

1. (a) *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $t = \ln x$. Si $z(t) = y(e^t)\, e^{-\frac{t}{2}}$ alors $y(x) = \sqrt{x} z(\ln x)$.*
   (b) *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on déduit de l'égalité précédente que :*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} z(\ln x) + z'(\ln x) \right) \quad \text{et} \quad y''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(z''(\ln x) - \frac{1}{4} z(\ln x) \right)$$

   En remplaçant dans (E), on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(E') \; : z''(t) + \frac{1}{4} z(t)$$

   qui est une équation du second degré à coefficients constants.
   (c) *D'après le cours, ses solutions sont les fonctions :*

$$z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha \cos \frac{t}{2} + \beta \sin \frac{t}{2} \end{array} \right.$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha \cos \frac{\ln x}{2} + \beta \sin \frac{\ln x}{2} \end{array} \right.$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Références