Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad -\left(x^4+2x^2+1\right)y''+4x\left(x^2+1\right)y'+\left(x^4-4x^2+3\right)y=0$$

en introduisant la fonction $z(x)=\frac{y(x)}{1+x^2}$.

Solution : *Supposons qu'il existe une solution y de (E). Considérons pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction donnée par $z(x)=y(x)/1+x^2$. Comme :*

$$y(x)=\left(1+x^2\right)z(x), \quad y'(x)=\left(1+x^2\right)z'(x)+2xz(x) \quad \text{et} \quad y''(x)=\left(1+x^2\right)z''(x)+4z'(x)+2z(x),$$

en remplaçant dans (E), on trouve que la fonction z est alors solution de l'équation du second degré à coefficients constants : $z''-z=0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions : $\varphi_{\alpha,\beta}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \alpha e^x+\beta e^{-x}\end{array}\right.$ *où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Par conséquent y est de la forme :*

$$\boxed{\psi_{\alpha,\beta}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \left(\alpha e^x+\beta e^{-x}\right)\left(1+x^2\right)\end{array}\right.}$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On vérifie réciproquement que toute fonction de cette forme est solution de (E).

Références