Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E): \quad y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(t) = e^{t^2} y(t)$.

Solution : *Supposons qu'il existe une solution y de (E). Considérons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction z donnée par : $z(t) = e^{t^2} y(t)$, soit $y(t) = e^{-t^2} z(t)$. D'où $y'(t) = (z' - 2tz)e^{-t^2}$ et $y''(t) = (z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$. Donc $0 = y''(t) + 4ty'(t) + (11 + 4t^2)y(t) = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2 + 11 + 4t^2)e^{-t^2} = (z'' + 9z)e^{-t^2}$. Donc z vérifie l'équation du second degré à coefficients constants : $z'' + 9z = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha \cos 3t + \beta \sin 3t \end{array} \right.$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par conséquent y est de la forme :*

$$\boxed{\psi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\alpha \cos 3t + \beta \sin 3t)\, e^{-t^2} \end{array} \right.}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On vérifie réciproquement que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation.

Références