Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\left(t^2+1\right)y''+\left(t^2-2t+1\right)y'-2ty=0$$

en introduisant la fonction $z=y'+y$.

Solution : *Remarquons que l'équation s'écrit aussi : $\left(t^2+1\right)(y''+y')-2t(y+y')=0$. Supposons qu'il existe une solution y de l'équation différentielle. Posons $z=y'+y$. La fonction z vérifie : $\left(1+t^2\right)z'-2tz=0$. Cette équation est linéaire et du premier degré. Ses solutions sont les fonctions : $z_\alpha : t\mapsto \alpha\left(t^2+1\right)$. Reste à résoudre $y'+y=\alpha\left(t^2+1\right)$. Ses solutions sont : $\boxed{t\mapsto \alpha\left(t^2-2t+3\right)+\beta e^{-t}}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On en déduit que y est de cette forme. Réciproquement, toute fonction de cette forme est solution de l'équation différentielle.*

Références