Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $y'' - 2y' + y = te^t$
2. $y'' - 4y' + 5y = \cos 2t - 2\sin 2t$
3. $y'' + 9y = \cos 2te^t$.
4. $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$
5. $y'' + y' + y = e^t \cos t$.
6. $y'' - 3y' + 2y = (t^2 + 1)e^t$

Solution :

1. *On détermine facilement les solutions de l'équation homogène. Comme 1 est une racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme* $t \mapsto t^2 (at + b) e^t$ *et on trouve* $a = 1/6$ *et* $b = 0$. *Finalement, les solutions de l'équation sont les fonction* $t \mapsto (At + B) e^t + 1/6t^3 e^t$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
2. *On montre facilement que les solutions de l'équation sont les fonctions* $t \mapsto (A\cos t + B\sin t) e^{2t} - 3/13 \cos 2t - 2/13 \sin 2t$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
3. *On détermine facilement les solutions de l'équation homogène. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :* $y'' + 9y = e^{(1+2i)t}$ *sous la forme* $t \mapsto ae^{(1+2i)t}$. *On trouve* $a = 3/26 - i/13$. *Une solution particulière de* (E) *est donnée par la partie réelle de cette fonction, soit* $t \mapsto 1/26 (3\cos 2t + 2\sin 2t) e^t$ *et les solutions de* (E) *sont les fonctions :* $t \mapsto A\cos 3t + B\sin 3t + 1/26 (3\cos 2t + 2\sin 2t) e^t$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$..
4. *On montre facilement que les solutions de l'équation sont les fonctions* $t \mapsto \dfrac{1}{3}te^t + Ae^t + Be^{-5t}$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
5. *On cherche une solution particulière de* $y'' + y' + y = e^{(1+i)t}$ *de la forme* $t \mapsto ae^{(1+i)}t$. *On trouve alors une solution particulière de* (E) *qui est* $t \mapsto (2/13 \cos t + 3/13 \sin t)e^t$. *Les solutions de* (E) *sont les fonctions :*$t \mapsto (\dfrac{2}{13}\cos t + \dfrac{3}{13}\sin t)e^t + Ae^{-\frac{t}{2}} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}t + Be^{-\frac{t}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

6. *On montre facilement que les solutions de l'équation sont les fonctions* $t \mapsto \left(-\dfrac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right)e^t + Ae^t + Be^{2t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Références