Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre les équations différentielles (E) données par :

1. $y'' - 3y' + 2y = e^t$
2. $y'' - 4y' + 4y = (t^2+1)e^{2t}$
3. $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$
4. $y'' + y = \sin 2t$
5. $y'' + y' - 2y = \sin t e^t$
6. $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t-1)e^{2t} + t - 2$

Solution :

1. *Les racines de l'équation caractéristique associée à (E) sont 1 et 2. Les solutions de l'équation générale sont les fonctions $t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Comme 1 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) de la forme : $t \mapsto ate^t$. On trouve $a = -1$. Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto (A-t)\,e^t + Be^{2t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.*
2. *2 est une racine double de l'équation caractéristique associée à l'équation. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $t \mapsto (At+B)\,e^{2t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $t^2\left(at^2+bt+c\right)e^{2t}$. On trouve alors $a = 1/12$, $b = 0$ et $c = 1/2$. Les solutions de E sont donc les fonctions $t \mapsto \left(t^2/12\left(6+t^2\right) + At + B\right)e^{2t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.*
3. *L'équation caractéristique associée à (E) admet deux racines complexes conjuguées $-1 \pm 2i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $t \mapsto (A\cos 2t + B\sin 2t)\,e^{-t}$. Linéarisons le second membre, on obtient : $\cos^2 t = 1/2\,(1+\cos 2t)$. Une solution particulière de $y'' + 2y' + 5y = 1/2\cos(2t)$ est $t \mapsto 1/34\cos 2t + 2/17\sin 2t$. Une solution particulière de $y'' + 2y' + 5y = 1/2$ est la fonction constante :$t \mapsto 1/10$. On applique alors le principe de superposition et les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto (A\cos 2t + B\sin 2t)\,e^{-t} + 1/34\cos 2t + 2/17\sin 2t + 1/10$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.*
4. *L'équation caractéristique associée à (E) admet deux racines complexes conjuguées $\pm i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions : $t \mapsto A\cos t + B\sin t$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto a\cos 2t + b\sin 2t$. On trouve $a = 0$*

et $b = -1/3$. *Les solutions de* (E) *sont donc les fonctions* $t \mapsto (A\cos t + B\sin t) - 1/3\sin 2t$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

5. *On vérifie facilement que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :* $t \mapsto Ae^t + Be^{-2t}$. *Introduisons l'équation complexe* $y'' + y' - 2y = e^{(1+i)t}$. *On calcule une solution particulière facilement :*$t \mapsto -e^t/10\,(3\cos t + \sin t)$. *Les solutions de* (E) *sont donc les fonctions :* $t \mapsto Ae^t + Be^{-2t} - e^t/10\,(3\cos t + \sin t)$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
6. *On détermine facilement les solutions de l'équation homogène. On utilise le principe de superposition pour chercher une solution particulière. On trouve la solution générale :*

$$t \mapsto e^t + \frac{t^3 - t^2}{2}e^{2t} + \frac{t-1}{4} + (At + B)e^{-t}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Références