Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver toutes les fonctions $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *continues sur l'intervalle* $I = [0,+\infty[$, *vérifiant :*

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt$$

⚠ *Attention 0.1 Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse* **??** *page* **??**.

Solution : *Comme* f *est continue, par application du théorème fondamental de l'analyse, il existe une primitive* F *de* f *sur* $\mathbb{R}_+$ *qui s'annule en* 0. *On a de plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *la relation :* $2xf(x) = 3F(x)$ *qui permet d'affirmer que, comme* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *il en est de même de* f. *La fonction* f *est alors solution de l'équation différentielle :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad 2xf'(x) - f(x) = 0$$

et donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\boxed{f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha\sqrt{x} \end{array}\right.}$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation fonctionnelle de départ.*

Références