Pas de titre

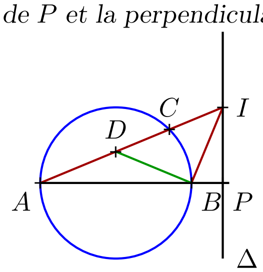
Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère un cercle de centre O et de rayon 1. On considère un diamètre $[AB]$ de ce cercle et un point C sur le cercle différent de A et de B et non situé sur la médiatrice de $[AB]$. On appelle D le point de la droite (AC) qui se projette orthogonalement sur (AB) en O. La tangente au cercle au point C coupe la droite (AB) en un point P. Montrer que la droite (AC), la perpendiculaire à $[AB]$ issue de P et la perpendiculaire à (BD) issue de B sont concourantes.



Solution : *On considère un repère orthonormal direct centré en O, d'axe (Ox) parallèle à $[AB]$ tel que $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $C\left|\begin{matrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{matrix}\right.$. Comme C n'est pas situé sur la médiatrice de $[AB]$, $\cos\theta \neq 0$. On calcule une équation cartésienne de la droite (AC) dans ce repère et on trouve :*

$$\boxed{(AC)\ : \sin\theta x - (\cos\theta + 1)y + \sin\theta = 0}$$

Puis on calcule les coordonnées de $\boxed{D\left|\begin{matrix}0\\ \tan\theta/2\end{matrix}\right.}$. La tangente en C au cercle a pour équation cartésienne

$$\boxed{T_\theta :\ \cos\theta x + \sin\theta y = 1}$$

et on trouve les coordonnées du point P : $\boxed{P\left|\begin{matrix}1/\cos\theta\\ 0\end{matrix}\right.}$. On note I l'intersection de la perpendiculaire à (BD) passant par B et de la perpendiculaire à (AB) passant par P : $I = B + \lambda\overrightarrow{n}$ où

$\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix}\tan\theta/2\\1\end{matrix}\right.$ *est orthogonal au vecteur* $\overrightarrow{BD}$. *En utilisant que* $x_I = 1/\cos\theta$, *on trouve que*

$$\boxed{I\left|\begin{matrix}1/\cos\theta\\\tan\theta\end{matrix}\right.}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à la droite (AC) *:*

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - (\cos\theta + 1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta = 0$$

Références