Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une fonction $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer que pour toute solution non-nulle φ de l'équation différentielle

$$(E) \ : y' - a(x)y = 0$$

il existe un unique réel α tel que la fonction définie par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ soit T- périodique.

⚠ *Attention 0.1* *Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse* **??** *page* **??**.

Solution : *Soit une solution φ de l'équation différentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{\int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction ψ donnée par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ vérifie alors

$$\frac{\psi(x+T)}{\psi(x)} = e^{-\alpha T + \int_x^{x+T} a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Mais la fonction définie par $A(x) = \int_x^{x+T} a(t)\ \mathrm{d}t$ est de classe 1 sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $A'(x) = a(x+T) - a(x) = 0$. Par conséquent, $\dfrac{\psi(x+T)}{\psi(x)} = e^{-\alpha T + \int_0^T a(t)\ \mathrm{d}t}$. On doit donc avoir

$$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\ \mathrm{d}t$$

et on vérifie réciproquement que ψ est T-périodique.

Références