

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère une fonction $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et T -périodique. Montrer que pour toute solution non-nulle φ de l'équation différentielle

$$(E) : y' - a(x)y = 0$$

il existe un unique réel α tel que la fonction définie par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ soit T -périodique.

⚠ Attention 0.1 Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse ?? page ??.

Solution : Soit une solution φ de l'équation différentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{\int_0^x a(t) dt}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction ψ donnée par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ vérifie alors

$$\frac{\psi(x+T)}{\psi(x)} = e^{-\alpha T + \int_x^{x+T} a(t) dt}$$

Mais la fonction définie par $A(x) = \int_x^{x+T} a(t) dt$ est de classe 1 sur \mathbb{R} d'après le théorème fondamental, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $A'(x) = a(x+T) - a(x) = 0$. Par conséquent, $\frac{\psi(x+T)}{\psi(x)} = e^{-\alpha T + \int_0^T a(t) dt}$. On doit donc avoir

$$\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

et on vérifie réciproquement que ψ est T -périodique.

Références