Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ **_Pas de titre_**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

⚠ *Attention 0.1 Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse* **??** *page* **??**.

Solution : *Soit f une telle fonction. Elle vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\ \mathrm{d}t$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x + 2f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\ \mathrm{d}t = 3f(x) + \cos x - \sin x$$

Par conséquent, f doit être une solution de l'équation différentielle

$$(E)\ : y' - 3y = \cos x - \sin x$$

On cherche l'ensemble des solutions de (E) et on trouve

$$\mathcal{S}_E = \{Ce^{3x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\}$$

Puisque $f(0) = 0$, il vient :

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$$

et on vérifie que cette fonction convient.

Références