Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $k > 0$. Montrer qu'il existe une unique condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$ telle que la solution du problème de Cauchy

$$y' - ky = \sin t \quad y(0) = y_0$$

soit bornée sur $[0, +\infty[$.

Solution : *On cherche la solution générale de l'équation différentielle , avec une solution particulière de la forme $t \mapsto A\cos t + B\sin t$. On trouve que les solutions sont les fonctions :*

$$y(t) = -\frac{1}{k^2+1}\left(k\sin t + \cos t\right) + Ce^{kx}$$

Pour qu'une telle solution soit bornée sur $[0, +\infty[$, il faut et il suffit que $C = 0$ et alors

$$y(x) = -\frac{1}{k^2+1}\left(k\sin t + \cos t\right)$$

qui correspond à la donnée initiale $y(0) = -\dfrac{1}{k^2+1}$.

Références