Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $y' + (\tan x)\ y - \sin 2x = 0$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $\operatorname{sh} x\ y' - \operatorname{ch} x y = 1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *puis sur* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $x^3 y' + 4\left(1 - x^2\right) y = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
4. $\sqrt{x^2 - 1}\ y' + y = 1$ *sur* $[1, +\infty[$.
5. $\sin^3 x\ y' = 2 \cos x\ y$ *sur* $]0, \pi[$.

Solution : *Après avoir normalisé si nécessaire l'équation différentielle étudiée et vérifié que l'équation normalisée est définie sur l'intervalle spécifié, on résout l'équation homogène associée puis on cherche, si nécessaire, une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2\,(\cos(x))^2 + \alpha \cos(x); \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\operatorname{ch} x + \alpha \operatorname{sh}(x); \quad \alpha \in \mathbb{R}$. *Le* α *trouvé pour* $\mathbb{R}_+^*$ *n'a rien à voir avec le* α *trouvé pour* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha\, e^{2\,x^{-2}} x^4; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + \alpha e^{-\operatorname{argch} x} = 1 + \dfrac{\alpha}{x + \sqrt{x^2 - 1}}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha\, e^{2\,(-1+\cos(2\,x))^{-1}} = \alpha \exp\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right); \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Références