Pas de titre

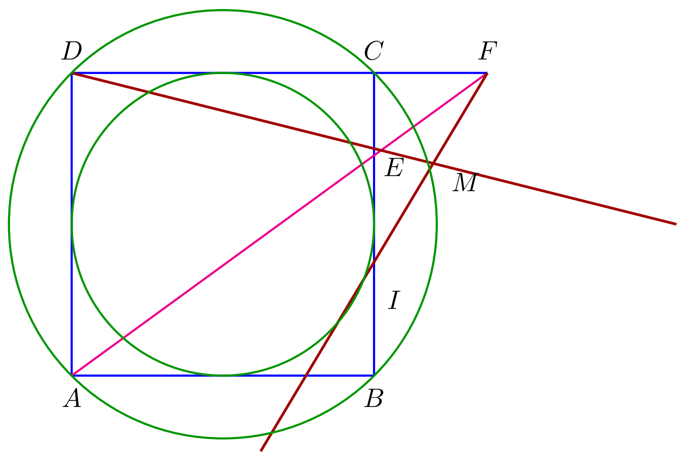
Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Par le sommet A d'un carré $ABCD$, on mène une droite qui rencontre la droite (BC) en E et la droite (CD) en F. Démontrer que la droite qui joint le point F au milieu I du segment $[BE]$ est tangente au cercle inscrit au carré et rencontre la droite (DE) en un point M situé sur le cercle circonscrit au carré.



Solution : *On considère le repère orthonormé d'origine le centre du carré et d'axes parallèles aux axes du carré. Alors $A\left|\begin{matrix}-a\\-a\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}a\\-a\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}a\\a\end{matrix}\right.$, $D\left|\begin{matrix}-a\\a\end{matrix}\right.$. On considère la droite qui passe par A, E, F. En notant m sa pente, son équation cartésienne est $y + a = m(x + a)$. On en déduit les coordonnées de $\boxed{E\left|\begin{matrix}a\\(2m-1)a\end{matrix}\right.}$ et $\boxed{F\left|\begin{matrix}\dfrac{a(2-m)}{m}\\a\end{matrix}\right.}$. Puis les coordonnées de $\boxed{I\left|\begin{matrix}a\\(m-1)a\end{matrix}\right.}$. Ensuite l'équation* cartésienne de la droite (FI) :

$$\boxed{(FI)\ : m(m-2)x + 2(1-m)y + a(m^2 - 2m + 2) = 0}$$

On calcule la distance de l'origine à cette droite :

$$d(O,(FI)) = \frac{a|m^2 - 2m + 2|}{\sqrt{m^2(m-2)^2 + 4(m-1)^2}}$$

mais comme $(m^2 - 2m + 2)^2 = m^2(m-2)^2 + 4(1-m)^2 = m^4 - 4m^3 + 8m^2 - 8m + 4$, on trouve que cette distance vaut a et par conséquent, la droite (FI) est bien tangente au cercle inscrit dans le carré. Cherchons ensuite les coordonnées du point M. $\boxed{\overrightarrow{DE}\left|\begin{matrix} 2a \\ 2(m-1)a \end{matrix}\right.}$, $M = D + \lambda\overrightarrow{DE}$ d'où si

$M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$,

$$\begin{cases} x &= (2\lambda - 1)a \\ y &= [1 + 2(m-1)\lambda] \end{cases}$$

Comme $M \in (FI)$, on tire $\lambda = -\dfrac{m^2 - 2}{m^2 - 2m + 2}$ et ensuite

$$\boxed{M\left|\begin{matrix} -\dfrac{a(m^2-2)}{m^2 - 2m + 2} \\ -\dfrac{a(m^2 - 4m + 2)}{m^2 - 2m + 2} \end{matrix}\right.}$$

On vérifie ensuite que $d(O, M)^2 = 2a^2$.

Références