Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver un équivalent de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n(k^2+n^2)}}{n}$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons u_n en faisant apparaître le groupement k/n :*

$$u_n = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(k/n)^2+1} = \sqrt{n}v_n$$

où v_n est une somme de Riemann qui converge vers $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Pour calculer I, le plus rapide est d'intégrer par parties :

$$I = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'on tire $2I = \sqrt{2} + [\operatorname{argsh} x]_0^1$ et comme $\operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, on tire $I = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Par conséquent, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)\sqrt{n}}$.

Références