Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n}$$

Solution : *Comme les termes de u_n sont strictement positifs, nous pouvons transformer le produit en somme en utilisant le logarithme. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$. On calcule alors*

$$v_n = -4 \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln \left[n^2(1 + k^2/n^2)\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln(1 + k^2/n^2)$$

On reconnaît alors une somme de Riemann, associée à la subdivision du segment $[0, 1]$ en $2n$ intervalles en écrivant

$$v_n = 2 \times \frac{1}{(2n)} \sum_{k=1}^{2n} \ln \left(1 + 4\frac{k^2}{(2n)^2}\right)$$

Comme la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+4x^2) \end{array} \right.$ est continue sur le segment $[0, 1]$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2I = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties cette intégrale, on trouve $I = \dfrac{1}{2}\int_0^2 \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\left[u\ln(1+u^2)\right]_0^2 - \dfrac{1}{2}\int_0^2 \dfrac{2u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \dfrac{1}{2}\ln 5 - 2 + 2\arctan 2$ et donc finalement, $u_n = e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{5}{e^4}e^{2\arctan 2}$.

Références