Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\, dt$$

1. *Justifier l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (I_n).*

Solution :

1. *Soit $t \in [0,1[$. Puisque $1 - t^n = \left(1 + t + \cdots + t^{n-1}\right)(1-t)$,*

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n(1 + t + \cdots + t^{n-1}) = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k \xrightarrow[x \to 1^-]{} n$$

Donc à n fixé, la fonction à intégrer se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I_n existe.

2. *D'après ce calcul, on peut exprimer I_n à l'aide d'une somme :*

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$$

On reconnaît une somme de Riemann :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{k}+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)$$

où $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array} \right.$ *est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. donc*

$$I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \boxed{\ln 2}$$

Références