Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{k+n}}$$

Solution : *On reconnaît une somme de Riemann :*

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} \end{array} \right.$$

avec la fonction f qui est continue sur le segment $[0,1]$. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

C'est une intégrale d'une fraction rationnelle en x et en une racine n-ième d'une homographie qui se calcule grâce au changement de variables $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$. On trouve alors : $x = \frac{t^2}{1-t^2} = -1 + \frac{1}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$ et

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-t^2)t\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = -2\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \boxed{-\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

Références