

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit :

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2 e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$$

et on reconnaît une somme de Riemann. L'intégrale à calculer est $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$. La fonction $f : x \mapsto \frac{e^{-1/x}}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ donc cette intégrale est bien définie. Une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto e^{-1/x}$ donc l'intégrale vaut $-1/e$. En conclusion

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1/e.$$

Références