Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

2 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On met en évidence le groupement k/n :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} + \frac{1}{n}$$

On reconnaît une somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1)$ donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{2} - 1).$$

Références