

Pas de titre

François Capaces¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and Alain Soyeur³

¹, ,

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

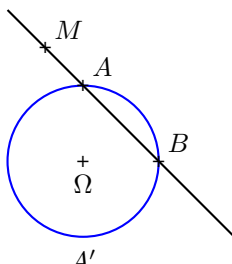
On considère dans le plan un cercle de centre Ω et de rayon R . Soit M un point du plan. On appelle puissance de M par rapport au cercle C , le réel

$$\pi_C(M) = \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$

1. On considère une droite passant par M et qui coupe le cercle C en deux points A et B . Montrer que

$$\pi_C(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

2. On considère deux cercles non-concentriques C et C' et l'on appelle axe radical l'ensemble des points M du plan vérifiant $\pi_C(M) = \pi_{C'}(M)$. Montrer que cet ensemble est une droite orthogonale à la droite joignant les centres des cercles.



Solution :

1. Introduisons le point A' symétrique de A par rapport à Ω . En utilisant que $[AA']$ est un diamètre, donc que

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0$, calculons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} \\ &= (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A'}) \\ &= \|\overrightarrow{M\Omega}\|^2 + \overrightarrow{M\Omega} \cdot (\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega A'}) + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} \\ &= \|\overrightarrow{M\Omega}\|^2 - R^2 \\ &= \pi_C(M) \end{aligned}$$

2. On se place dans un repère orthonormé dans lequel :

$$(C) : x^2 + y^2 = R^2 \quad (C') : (x - d)^2 + y^2 = r^2$$

où $\Omega \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\Omega' \begin{vmatrix} d \\ 0 \end{vmatrix}$ sont les centres des cercles de rayon R et r . On calcule

$$\begin{aligned} \pi_C(M) = \pi_C(M') &\iff x^2 + y^2 - R^2 = (x - d)^2 + y^2 - r^2 \\ &\iff 2dx = R^2 + d^2 - r^2 \end{aligned}$$

On trouve l'équation d'une droite orthogonale à $(\Omega\Omega')$.

Références