Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre* 0 *et* $X \in \mathbb{R}_+^*$.
2. *En déduire l'existence d'une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad \left|\left(1+x^2\right)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(1+x^2\right)\right| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

3. *Trouver alors deux réels* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \left(1+x^2\right)^{1/n}\, dx = a + \frac{b}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Solution :

1. *On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre* 0 *et* $X \in \mathbb{R}_+^*$ *:*

$$\left|e^X - (1+X)\right| \leqslant \frac{X^2}{2} e^X$$

car $\sup_{x\in[0,X]} |e^x| = e^X$.

2. *Soient* $x \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $\left(1+x^2\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)$, *avec* $X = \frac{1}{n}\ln(1+x^2)$, *on trouve que :*

$$\left|\left(1+x^2\right)^{1/n} - \left(1 + \frac{1}{n}\ln\left(1+x^2\right)\right)\right| \leqslant \frac{\ln^2\left(1+x^2\right)}{2n^2}\left(1+x^2\right) \leqslant \frac{\ln^2(2)}{n^2}$$

car $1 + x^2 \leqslant 2$

3. *Posons* $a = \int_0^1 \, dx = 1$ *et* $b = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) \, dx$. *On a alors :*

$$\varepsilon_n = \left| \int_0^1 \left(1+x^2\right)^{1/n} \, dx - a - \frac{b}{n} \right| = \left| \int_0^1 \left[\left(1+x^2\right)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \ln\left(1+x^2\right) \right] \, dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{C}{n^2} \, dx \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

Donc $\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{1/n} \, dx = a + \dfrac{b}{n} + \varepsilon_n$ *et* $|n\varepsilon_n| \leqslant \dfrac{C}{n}$ *donc* $\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *Il ne reste plus qu'à calculer* b *par parties :*

$$b = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) \, dx = \left[x \ln\left(1+x^2\right) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \ln 2 - 2 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Références