Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0, 1]$. On pose pour $x \in]0, 1[$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))}{\sin(\pi x)}$$

Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0 et 1.

Solution : On écrit la formule de Taylor-Young pour f en 0 à l'ordre 1 pour tout $x \in [0, 1]$:
 $f(x) = f(0) + xf'(0) + o_{x \rightarrow 0^+}(x)$ et on remplace dans $g(x)$:

$$g(x) = \frac{xf'(0) + o_{x \rightarrow 0^+}(x) - x(f(1) - f(0))}{\sin(\pi x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{f'(0) + o_{x \rightarrow 0^+}(1) - (f(1) - f(0))}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} (f'(0) - f(1) + f(0))$$

et on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{\pi} (f'(0) - f(1) + f(0))$. La formule de Taylor-Young appliquée aux fonctions f et $x \mapsto \sin(\pi x)$ en 1 à l'ordre 1 donne pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1) \quad \text{et} \quad \sin(\pi x) = -\pi(x-1) + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1)$$

et on procède comme précédemment :

$$g(x) = \frac{(-f(1) + f'(1) - f(0))(x-1) + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1)}{-\pi(x-1) + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1)} = \frac{-f(1) + f'(1) - f(0) + o_{x \rightarrow 1^-}(1)}{-\pi + o_{x \rightarrow 1^-}(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\pi} (f(1) - f'(1) + f(0))$$

On prolonge alors f par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{\pi} (f(1) - f'(1) + f(0))$.

Références