Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2}{x^2}$.

Solution : *On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + f''(a)\,\frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$$

et on remplace :

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \underset{h\to 0}{o}(1) \xrightarrow[h\to 0]{} f''(a)$$

On applique ce résultat à la fonction cosinus qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en $a = 0$. On obtient : $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2}{x^2} = -1$

Références