Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2$$

Solution : *La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad \ln^{(n)}(1+x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. On applique alors la formule de Taylor avec reste intégrale :*

$$\begin{aligned} \ln 2 = & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{(-1)^n (n)!}{(1+t)^{n+1}}\,dt \\ = & \ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)}\,dt. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)}\,dt \right| = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et on conclut comme dans l'exercice précédent.

Références