Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

2. *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Solution :

1. *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On applique la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[0, x]$ à la fonction* exp *qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce segment :*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!}\, dt.$$

Mais

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!}\, dt \right| \leqslant \int_0^{|x|} \frac{|x-t|^n e^t}{n!}\, dt \leqslant \int_0^{|x|} |x|^n e^{|x|}\, dt = \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

et on en déduit l'inégalité annoncée.

2. *Comme* $\frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *par le théorème des gendarmes* $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *et* $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x}$.

Références