Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et les applications :*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array} \right.$$

1. *Prouver que* φ *et* ψ *sont des endomorphismes de* E*.*
2. *Calculer* $\varphi \circ \psi$ *et* $\psi \circ \varphi$*.*
3. *Déterminer les noyaux et images de* φ *et* ψ*.*

Solution :

1. *La linéarité de* φ *provient de la linéarité de la dérivation et celle de* ψ *de la linéarité de l'intégration.*
2. *Soit* $f \in E$*. Comme* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et, d'après le théorème fondamental, elle admet une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$*. On a :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\psi(f))(x) = F(x) - F(0)$*. Par conséquent :* $\varphi \circ \psi(f) = F' = f$ *et donc* $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$*. De même,* f' *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et une primitive de* f' *sur* $\mathbb{R}$ *est bien entendu donnée par* f*. Donc, pour tout* $\psi \circ \varphi(f) = \psi(f') = f - f(0)$*.*
3. *Comme* $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ *est bijective, nécessairement* φ *est surjective et* ψ *est injective. Donc* $\operatorname{Im}\varphi = E$ *et* $\operatorname{Ker}\psi = \{0\}$*. Par ailleurs,* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est donné par les fonctions constantes sur* $\mathbb{R}$ *et* $\operatorname{Im}\psi = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$*. En effet, si* f *est élément de ce dernier ensemble alors* $\psi(f')$ *est la primitive de* f' *qui s'annule en* 0*. Il en est de même pour* f *et donc* $f = \psi(f')$*. Réciproquement, toute fonction de la forme* $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ *s'annule en* 0 *et est* $\mathcal{C}^\infty$ *si* f *l'est.*

Références