Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in E$, on note $T(f) = g$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$$

1. *Montrer que T est un endomorphisme de E.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$.*

Solution :

1. *La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale. Si $f \in E$ alors par opérations sur les fonctions continues, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet, d'après le théorème fondamental, une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x)$. Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ il en est de même de g et on a bien $g \in E$. L'application T est bien à valeurs dans E.*
2. *Soit $f \in \operatorname{Ker} T$ et F la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto tf(t)$ qui s'annule en 0. Alors $F = 0$ et $F' = 0$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tf(t) = 0$. On en déduit que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^*$. Comme f est continue en 0, on a aussi $f(0) = 0$. Donc $f = 0$ et $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. L'endomorphisme T est injectif. Montrons que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto xF(x) - G(x)$ où $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et où $G : x \mapsto \int_0^x F(t)\, dt$. Soit $f \in E$. Notons F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 et G celle de F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Une intégration par parties livre :*

$$T(f) = \int_0^x tf(t)\, dt = \Big[tF(t)\Big]_0^x - \int_0^x F(t)\, dt = xF(x) - G(x)$$

donc $T(f) \in \mathscr{F}$. Réciproquement, si $H = x \mapsto xF(x) - G(x) \in \mathscr{F}$ alors H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H'(t) = F(t) + tF'(t) - G'(t) = tF'(t)$ car $G' = F$. Donc $H = T(F'(t))$ et $H \in \operatorname{Im} T$.

Références