

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

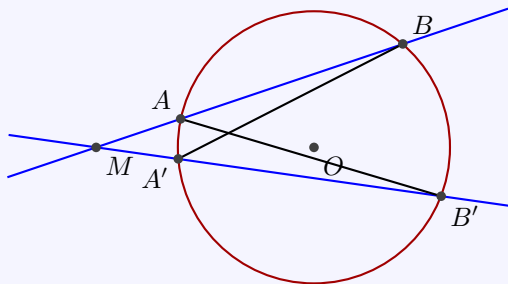
2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit M un point et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O . Une droite Δ passant par M coupe $\mathcal{C}$ en deux points A et B , éventuellement confondus si Δ est tangente à $\mathcal{C}$.

Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de la droite Δ choisie.

Solution :



Soit I le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 - IA^2 \end{aligned}$$

Maintenant, comme (OI) est la médiatrice de $[AB]$, on a : $MI^2 = MO^2 + IO^2$ et $IA^2 = OI^2 + OA^2$. D'où $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 + IO^2 - (OI^2 + OA^2) = MO^2 - R^2$.

Ce nombre s'appelle la puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

Rappelons la méthode utilisée en classe de seconde :

Les triangles MBA' et MAB' sont semblables. En effet ils ont l'angle $\widehat{AMA'}$ en commun. De plus les angles $\widehat{MBA'}$ et $\widehat{MB'A}$ sont inscrits dans le même cercle et interceptent le même arc $\widehat{A'A}$. Ils sont donc égaux.

On en déduit :

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{MB}{MB'} \quad \text{d'où } MA.MB = MA'.MB'.$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut distinguer tous les cas de figure : M à l'intérieur, à l'extérieur, sur le cercle $\mathcal{C}$. Triangles aplatis, etc.

Références