Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\, dt$$

1. *Justifier l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (I_n) [1].*

Solution :

1. *Soit $t \in [0,1[$. Puisque $1 - t^n = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$,*

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n(1 + t + \cdots + t^{n-1}) = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k$$

Donc à n fixé, la fonction à intégrer est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I_n existe.

2. *D'après ce calcul, on peut exprimer I_n à l'aide d'une somme :*

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$$

En encadrant pour $i \geqslant 2$, $1/i$ par deux intégrales :

$$\int_i^{i+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{dt}{t}$$

on obtient un encadrement de I_n :

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leqslant I_n \leqslant \int_n^{2n} \frac{dt}{t}$$

1. Une autre solution de cet exercice utilisant les sommes de Riemann est proposée dans l'exercice **??** page **??**

et donc

$$\ln \frac{2n+1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \ln 2.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{I_n \to \ln 2}$.

Références