Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

On note pour un entier n non-nul :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \text{ et } I_n = \int_0^n \left(\int_0^n \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right) \mathrm{d}x$$

1. *Calculer l'intégrale I_n pour $n > 0$.*
2. *Déterminer un équivalent de la suite (I_n).*
   Indication 0.0 : *On pourra utiliser un développement limité à l'ordre 1 de $\ln$ en 0.*
3. *Encadrer S_n à l'aide de I_n pour $n > 0$.*
4. *En déduire un équivalent de (S_n).*

Solution :

1. *Une première intégration suivant la variable x conduit à $I_n = \int_0^n \ln(x+n+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties, on trouve finalement $\boxed{I_n = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1)}$.*
2. *Pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$, on a : $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ donc si (u_n) est une suite réelle convergeant vers 0 alors $\ln(1+u_n) = u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$. Écrivons*

$$\begin{aligned} I_n &= (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) \\ &= (2n+1)\left(\ln(2n) + \ln(1+1/2n)\right) - 2(n+1)\left(\ln n + \ln(1+1/n)\right) \\ &= (2n+1)\left(\ln(2n) + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2n}\right)\right) - 2(n+1)\left(\ln n + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (2n+1)\ln 2 - \ln n - 1 - \frac{3}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= 2n\ln 2 \underbrace{\left(1 + \frac{\ln 2 - \ln n - 1 - \frac{3}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}{2n\ln 2}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \end{aligned}$$

$\underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\boxed{2n\ln 2}$

3. *Comme $x \mapsto 1/x$ est décroissante, et que*

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_i^{i+1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x+y+1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

on en tire l'encadrement

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+3} \leqslant I_n \leqslant S_n$$

d'où $I_n \leqslant S_n$ et en sortant les termes de la somme à gauche :

$$I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$$

Mais toujours en comparant cette somme avec une intégrale, $\sum_{j=2}^{n+1} \dfrac{1}{j} \leqslant \int_1^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. Finalement,

$$I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + \ln(n+1)$$

4. *On tire facilement des deux questions précédentes que $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2n \ln 2}$.*

Références