

Suite de Mercator

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Suite de Mercator

On considère la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

1. Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
2. Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.

On considère ensuite la suite, dite de Mercator, de terme général

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

3. Exprimer pour $n \geq 1$, S_n en utilisant I_n .
4. En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.

Solution :

1. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $t \in [0, 1]$, on a la majoration $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$, on peut encadrer l'intégrale I_n ainsi :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

2. Écrivons pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(t+1-1)t^{n-1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^{n-1} dt - I_{n-1} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$$

Alors $\boxed{I_n = \frac{1}{n} - I_{n-1}}.$

3. En exprimant I_n en fonction de I_0 , on trouve que

$$I_n = \frac{1}{n} - I_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + I_{n-2} = \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{1} + (-1)^n I_0$$

En multipliant par $(-1)^{n-1}$, on trouve alors que $(-1)^{n-1} I_n = S_n - I_0$. Finalement

$$\boxed{S_n = I_0 + (-1)^{n-1} I_n}.$$

4. Puisque $|(-1)^{n-1} I_n| = I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, il vient que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I_0$. Mais $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$ et donc la suite (S_n) converge vers $\ln 2$.

Références