Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Soit un entier* $k \geqslant 1$. *Encadrer l'intégrale* $I_k = \int_k^{k+1} \ln t \ \mathrm{d}t$.
2. *En déduire un équivalent de la suite de terme général* $u_n = \ln n!$.

Solution :

1. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Comme la fonction logarithme est croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *pour tout* $t \in [k, k+1]$, *on a :* $\ln k \leqslant \ln t \leqslant \ln(k+1)$ *et il vient que pour tout* $k \geqslant 1$, $\ln k \leqslant I_k \leqslant \ln(k+1)$.
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *En sommant ces inégalités pour* $1 \leqslant k \leqslant n$, *on trouve que*

$$\int_1^n \ln t \ \mathrm{d}t \leqslant \ln n! \leqslant \int_2^{n+1} \ln t \ \mathrm{d}t$$

et puisque $x \mapsto x \ln x - x$ *est une primitive de* $\ln$ *sur* $[1, +\infty[$, *on obtient l'encadrement suivant :*

$$n \ln n - n + 1 \leqslant \ln n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$$

et l'on démontre ensuite facilement en divisant cette inégalité par $n \ln n$ *que* $(\ln n!)/(n \ln n)$ *est encadrée par deux suites qui convergent vers* 1. *Par conséquent,* $\boxed{\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n}$.

Références