Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue et positive. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$I_n = \left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$$

Indication 0.0 : *On étudiera d'abord le cas où f est une fonction constante.*

Solution : *Si f est une fonction constante de valeurs $c \in \mathbb{R}$ alors $I_n = (c^n\,(b-a))^{\frac{1}{n}} = c\,(b-a)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.*

Montrons que si f n'est pas constante sur $[a, b]$ et si $M = \sup_{[a,b]} f$ alors $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$. Remarquons que M existe bien car f est continue sur le segment $[a, b]$. Ce maximum est de plus atteint en un point $x_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $\varepsilon < 1$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in\,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\, \cap [a, b]$, $M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$. Comme f est positive sur $[a, b]$, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant M - u_n = M - \left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} &\leqslant M - \left(\int_{]x_0-\eta,x_0+\eta[\cap[a,b]} (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \\ &\leqslant M - (M-\varepsilon)\,(2\eta)^{1/n} = M\left(1 - (2\eta)^{1/n}\right) + \varepsilon\,(2\eta)^{1/n} \end{aligned}$$

Comme $(2\eta)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut supposer qu'à partir d'un certain rang N, on a pour tout $n \geqslant N$: $1 - (2\eta)^{1/n} \leqslant \varepsilon/(2M)$ et $(2\eta)^{1/n} \leqslant \varepsilon/2$. On obtient alors : $0 \leqslant M - u_n \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon^2/2 \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ car $0 < \varepsilon < 1$. En résumé, on a montré que pour $n \geqslant N$, $|M - u_n| \leqslant \varepsilon$ donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M}$.

Références