Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$. Étudier la suite de terme général

$$I_n = n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Par deux intégrations par parties, on trouve que*

$$I_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,\mathrm{d}x$$

Mais puisque $\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} \sim 1$, en posant $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$ (qui existe puisque f'' est continue sur le segment $[0,1]$), on obtient la majoration suivante :

$$|\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_0^1 x^{n+2}|f''(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant M_2 \int_0^1 x^{n+2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{M_2}{n+3}$$

Alors d'après le théorème de majoration, $\int_0^1 x^{n+2} f''(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$$\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Références