Intégrale de Wallis

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Intégrale de Wallis***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

Une telle intégrale est appelée intégrale de Wallis.

1. *Montrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$
2. *Calculer I_0 et I_1.*
3. *Montrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$
4. *En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.*
5. *Montrer que (I_n) est décroissante et positive. En déduire que (I_n) est convergente.*
6. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
$$1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}.$$
7. *Montrer que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} I_{n+1}$.*
8. *Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$.*
9. *En déduire que : $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.*

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt \\ &\underset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \end{aligned}$$

2. *On vérifie facilement que* $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $I_1 = 1$.
3. *En effectuant une intégration par parties, on montre que :*

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t.\sin^{n+1} t\,dt \\ &= \left[-\cos t.\sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.\sin^n t\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right).\sin^n t\,dt \end{aligned}$$

donc : $I_{n+2} = (n+1)\,I_n - (n+1)\,I_{n+2}$ *d'où :* $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

4. *D'après les deux questions précédentes et grâce à un raisonnement par récurrence, on montre que, pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *:*

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. *Pour tout* $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n t \geqslant \sin^{n+1} t$ *donc* $I_n \geqslant I_{n+1}$ *et* (I_n) *est décroissante. Par ailleurs :* $\sin^n t \geqslant 0$ *donc* $I_n \geqslant 0$. *La suite* (I_n) *est donc décroissante et minorée. Par application du théorème de la limite monotone,* (I_n) *est convergente.*
6. (I_n) *étant décroissante, il vient que :* $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ *ce qui s'écrit aussi :* $1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$.
7. *D'après les questions 3 et 5, on obtient :*

$$1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

mais $\dfrac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc, par application du théorème des gendarmes,* $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et donc :* $I_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$ *ou encore :* $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

8. *En utilisant les expressions trouvées dans la question 4, on montre que :* $(n+1)\,I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
9. *Par application des deux questions précédentes et par opérations sur les équivalents :*

$$I_n = \sqrt{I_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{I_n.I_{n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\,(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

.

Références