Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} \, \mathrm{d}t$$

1. *Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$;*
2. *Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n ;*
3. *En déduire la limite de la suite de terme général*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Solution :

1. *Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\frac{t^n}{n!} e^{1-t} \leqslant \frac{e}{n!}$. Donc :*

$$0 \leqslant |I_n| \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!} \, \mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

Par le théorème des gendarmes, $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

2. *On effectue une intégration par parties :*

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-t} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-t} \, dt = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

donc $\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}}$.

3. *Par télescopage, on en déduit que*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = I_0 - I_n + 1$$

et donc que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_0 + 1$. *Comme* $I_0 = e - 1$, $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e}$.

Références