Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Déterminer le lieu du milieu des points $M \in \mathcal{C}$ et $M' \in \mathcal{C}'$ tels que les tangentes aux cercles en M et M' soient orthogonales.

Solution : *Considérons le repère d'origine le centre du premier cercle et tel que le centre du deuxième cercle soit $M\left|\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right.$. L'équation des deux cercles est alors :*

$$\begin{cases} \mathcal{C} : & x^2 + y^2 = r^2 \\ \mathcal{C}' : & (x-a)^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

le point M est d'affixe $z = re^{i\theta}$ et le point M' d'affixe $z' = a + Re^{i\theta'}$. Les tangentes en M et M' sont dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{u'}\left|\begin{matrix} -\sin\theta' \\ \cos\theta' \end{matrix}\right.$. Les tangentes sont orthogonales si et seulement si

$$\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' = \sin(\theta + \theta') = 0$$

c'est-à-dire $\theta' = k\pi - \theta \ [2\pi]$. Alors le milieu de $[MM']$ a pour affixe :

$$Z = \frac{1}{2}\big[a + re^{i\theta} + Re^{i(k\pi-\theta)}\big] = \frac{a}{2} + \big[\frac{r + i\varepsilon R}{2}\big]e^{i\theta} = \frac{a}{2} + \rho e^{i(\alpha+\theta)}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et

$$\big(\frac{r + i\varepsilon R}{2}\big) = \rho e^{i\alpha}$$

Lorsque θ varie entre 0 et 2π, le point P décrit le cercle de centre $\left|\begin{matrix} a/2 \\ 0 \end{matrix}\right.$ (milieu des centres des deux cercles) et de rayon $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{r^2 + R^2}$.

Références