Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$$

1. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,dx$$

2. *En déduire que*

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant une intégration par parties, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx &= \int_0^1 \frac{x.x^{n-1}}{1+x^n}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{n}\ln\left(1+x^n\right)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,dx \\
&= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,dx
\end{aligned}$$

2. *On en déduit que :*

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \\
&= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \\
&= 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,dx
\end{aligned}$$

Donc : $n\left(I_n - 1 + \dfrac{\ln 2}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$. Mais, d 'après l'inégalité : $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$, on obtient :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui prouve que : $\boxed{I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Références