Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la suite de terme général $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$..

1. *Étudier la monotonie de (I_n).*
2. *En déduire que (I_n) est convergente.*
3. *Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.*
4. *En déduire la limite de (I_n) ainsi qu' un équivalent simple de I_n.*

Solution :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, e]$, $\ln x \in [0, 1]$ et $\ln^{n+1} x \leqslant \ln^n x$. On passe à l'intégrale et cette inégalité amène $I_{n+1} \leqslant I_n$. (I_n) est donc décroissante.*
2. *Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^2 \ln^n x$ est positive sur $[1, e]$, la suite (I_n) est positive. Elle est donc minorée par 0 et on a montré qu'elle est décroissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente et sa limite est positive ou nulle.*
3. *On effectue une intégration par partie, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x^2 \ln^{n+1} x \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln^{n+1} x \right]_1^e - \int_1^e (n+1) \frac{x^3}{3} \frac{\ln^n x}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{3} \left(e^3 - (n+1) I_n \right) \end{aligned}$$

4. *On sait que (I_n) admet une limite $\ell \geqslant 0$. Supposons que $\ell \neq 0$. Alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient une contradiction. Donc $\ell = 0$. Toujours d'après la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = \dfrac{1}{n+1} \left(e^3 - 3I_{n+1} \right)$. Comme $I_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il vient : $\boxed{I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^3}{n+1}}$.*

Références