Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **_Pas de titre_**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

1. *Calculer I_0 et I_1.*
2. *Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.*
3. *En déduire que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$
puis la limite de (I_n).
4. *En déduire un équivalent de I_n.*

Solution :

1. $I_0 = e - 1$ *et* $I_1 = 1$.
2. *On effectue une intégration par parties :*
$$\begin{aligned} I_{n+1} = & \left[x (\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1) (\ln x)^n \, dx \\ = & e - (n+1) I_n \end{aligned}$$
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall x \in [1, e], 0 \leqslant (lnx)^n$ Donc $0 \leqslant I_n$. On en déduit que : $I_n = \dfrac{e - I_{n+1}}{(n+1)} \leqslant \dfrac{e}{(n+1)}$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.*
4. *D'après la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*
$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1} = \frac{e}{n+1} (1 - I_{n+1}) .$$
Mais comme $I_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il vient que : $\boxed{I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{e}{n+1}}$.

Références