Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx$.

1. *Étudier les variations de* $f : x \mapsto x(1-x)$ *sur* $[0,1]$.
2. *En déduire celles de* (I_n).
3. *En déduire que* (I_n) *est convergente.*
4. *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$
5. *En déduire la limite de* (I_n).

Solution :

1. *L'étude des variations de* f *permet de dresser le tableau suivant :*

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2. *On déduit de l'étude précédente que :* $\forall x \in [0,1], \quad x(1-x) \in [0,1]$. *Il vient alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $x^{n+1}(1-x)^{n+1} \leqslant x^n (1-x)^n$ *et* $I_{n+1} \leqslant I_n$. *On en déduit que* (I_n) *est décroissante.*
3. *La fonction* f *étant positive sur* $[0,1]$, *il en est de même de* (I_n). *En appliquant le théorème de la limite monotone, on en déduit que* (I_n) *est convergente et que sa limite est positive.*
4. f *est majorée par* $\dfrac{1}{4}$ *sur* $[0,1]$ *:* $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant \frac{1}{4}$. *Il en découle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [0,1]$, $x^n(1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ *et* $I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. *On a par ailleurs montré dans la question précédente que* $I_n \geqslant 0$.

5. *La suite* $\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{4}$ *donc elle converge vers* 0*. D'après le théorème des gendarmes,* (I_n) *converge vers* 0*.*

Références