Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

1. *Calculer* I_0, I_1 *et* I_2.
2. *Étudier la monotonie de* (I_n).
3. *En déduire que* (I_n) *est convergente.*
4. *Prouver que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \tfrac{1}{n+1}.$$
5. *En déduire la limite de* (I_n).
6. *En déduire un équivalent de la suite*
$$J_n = \int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)\,dx$$

Solution :

1. *On trouve :* $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln\sqrt{2}$ *et* $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.
2. *Pour tout* $x \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $x^{n+1} \leqslant x^n$ *ce qui amène :* $\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2}$ *et donc* $I_{n+1} \leqslant I_n$. *On en déduit que* (I_n) *est décroissante.*
3. *Comme la fonction* $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ *est positive sur* $[0,1]$, *on a :* $I_n \geqslant 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *La suite* (I_n) *est donc minorée par* 0. *On a montré qu'elle est décroissante. On applique le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle est convergente et que sa limite est positive.*
4. *Pour tout* $x \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $\frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$. *Donc :* $I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. *On a de plus montré précédemment que* $I_n \geqslant 0$.
5. *D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que* $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties livre :*

$$J_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2} = \frac{\ln 2}{n+1}\left(1 - \frac{2}{\ln 2}I_{n+2}\right).$$

Comme $I_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient que $\boxed{J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n+1}}$.

Références