Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Étudier la parité de g.*
3. *Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $1 - x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1$.*
4. *Prolonger g par continuité en 0.*
5. *Montrer que g ainsi prolongée est dérivable en 0 ?*
6. *Trouver $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.*

Solution :

1. *La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos t/t \end{array}\right.$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues. D'après le théorème fondamental, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g\left(x\right) = F\left(2x\right) - F\left(x\right)$. On en déduit que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g\left(-x\right) = \int_{-x}^{-2x} \cos t/t\,dt = \int_x^{2x} \cos\left(-u\right)/u\,du = g\left(x\right)$ donc g est paire. On étudiera donc g sur $\mathbb{R}_+^*$.*
3. *Soit $x \in \left]0, \pi/2\right]$. La fonction $t \mapsto \cos t$ est dérivable sur $[0, x]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $x \inf_{t\in]0,x[}\left(-\sin t\right) \leqslant \cos x - 1 \leqslant x \sup_{t\in]0,x[}\left(-\sin t\right)$ soit : $-x^2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0$*
4. *Soit $x \in [0, \pi/2]$. D'après la question précédente, on a : $\frac{1-t^2}{t} \leqslant \frac{\cos t}{t} \leqslant \frac{1}{t}$ donc $\ln 2 - 2x^2 + x^2/2 \leqslant g\left(x\right) \leqslant \ln 2$ et d'après le théorème des gendarmes $g\left(x\right) \xrightarrow[x\to0^+]{} \ln 2$. On prolonge g par continuité en 0 en posant $g\left(0\right) = \ln 2$.*
5. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$*

$$g'\left(x\right) = 2F'\left(2x\right) - F'\left(x\right) = \frac{\cos 2x}{x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 2x - 1}{x} - \frac{\cos x - 1}{x}$$

mais $\cos 2x - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -2x^2$ *donc* $\frac{\cos 2x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *et* $1-\cos x \underset{x\to 0^+}{\sim} x^2/2$ *donc* $\frac{\cos x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. *On en déduit que* $g'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *et donc que* g *est dérivable en* 0 *de nombre dérivé* $g'(0) = 0$.

6. *Voir l'exercice* **??**.

Références