Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux fonctions continues f et g sur $[0,1]$. On suppose que $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$;*
2. *Montrer que $f = g = 0$.*

Solution :

1. *Comme f et g sont continues sur $[0,1]$, d'après le théorème fondamentale, elles admettent des primitives F et G sur $[0,1]$. On peut de plus supposer que ces primitives s'annulent en 0. Remarquons que F et G sont éléments de $\mathcal{C}^1([0,1])$. Il vient alors pour tout $x \in [0,1]$:*

$$f(x) = G(x) \quad \text{et} \quad g(x) = F(x).$$

Mais alors f et g sont aussi éléments de $\mathcal{C}^1([0,1])$. Comme $f' = g$ et que $g' = f$, on montre par une récurrence facile que $f, g \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$.

2. *Comme $f' = g$ et que $g' = f$, f est solution de l'équation différentielle : $y'' - y = 0$. Donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$. Mais comme $f(0) = 0$ et que $f'(0) = g(0) = 0$, il vient que $\alpha = \beta = 0$. Donc $f = 0$. Comme $f' = g$, il est clair que $g = 0$ aussi.*

Références