Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

16 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0,+\infty[$. *On suppose que*

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où C est une constante strictement positive.

1. *Montrer que*
$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant C\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
C'est le lemme de Gronwall, *très utile pour étudier des équations différentielles.*
2. *Que peut-on dire si $f(x) \leqslant \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$?*

Indication 0.0 : *Introduire la fonction $\varphi(x) = C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et calculer sa dérivée.*

Solution :

1. *Introduisons la fonction φ donnée pour tout $x \in [0,+\infty[$ par $\varphi(x) = C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental, la fonction φ est dérivable et en utilisant l'hypothèse, pour tout $x \geqslant 0$, il vient que*
$$\varphi'(x) = f(x)g(x) \leqslant g(x)\varphi(x)$$
Introduisons alors la fonction $\psi(x) = e^{-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\varphi(x)$. On a
$$\psi'(x) = e^{-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\left(\varphi'(x) - g(x)\varphi(x)\right) \leqslant 0$$
Donc ψ est décroissante sur $[0,+\infty[$ et donc puisque $\psi(0) = C$,
$$\forall x \geqslant 0, \psi(x) \leqslant C \Rightarrow f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant Ce^{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$$
2. *Lorsque $C = 0$, on trouve que f est nulle sur $[0,+\infty[$.*

Références