

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t) dt$$

où C est une constante strictement positive.

1. Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right).$$

C'est le lemme de Gronwall, très utile pour étudier des équations différentielles.

2. Que peut-on dire si $f(x) \leq \int_0^x f(t)g(t) dt$?

Indication 0.0 : Introduire la fonction $\varphi(x) = C + \int_0^x f(t)g(t) dt$ et calculer sa dérivée.

Références