Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 juillet 2023

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

On se propose d'étudier la fonction définie par $g(x) = \int_x^{2x} \dfrac{\operatorname{ch} t}{t^2} dt$.

1. *Montrer que le domaine de définition de* g *est* $\mathbb{R}^*$.
2. *Etudier la parité de la fonction* g.
3. *Calculer la dérivée de la fonction* g *et dresser son tableau de variations.*
4. *Calculer la limite de la fonction* g *en* 0 *et en* $+\infty$.

Solution :

1. La fonction donnée par $f(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}$ est définie et continue sur les intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. D'après le théorème fondamental, f admet une primitive sur chacun de ces deux intervalles. On note F une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on peut alors écrire $g(x) = F(2x) - F(x)$. La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Par le changement de variables $u = -t$, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^{2x} f(-t)\,\mathrm{d}t = -g(x)$ car la fonction f est paire. La fonction g est donc impaire. On ne fera donc son étude que sur $I =]0, +\infty[$.
3. Remarquons tout d'abord que comme F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il en est de même de g par opérations sur les fonctions continues. Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{\operatorname{ch}(2x)}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} = \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{ch} x - 1}{2x^2}.$$

   Trouver les valeurs $x > 0$ telles que $g'(x) = 0$, revient à résoudre une équation du second degré en $\operatorname{ch} x$ et l'on trouve que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. On résout ensuite une équation du second degré en e^x et l'on trouve $e^x = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. Finalement $x_0 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$. La fonction g' est négative sur l'intervalle $]0, x_0[$ et positive sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$.

4. *Soit* $x > 0$. *Puisque* $\forall t \in [x, 2x]$, $\dfrac{\operatorname{ch} x}{4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(2x)}{x^2}$, *on en déduit que* $\dfrac{\operatorname{ch} x}{4x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{\operatorname{ch} x}{x}$ *et d'après le théorème des gendarmes, on obtient que* $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$\dot{4}0\dot{4}$

Références