Droite de Simson d'un triangle

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Droite de Simson d'un triangle**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, *on considère un triangle* (ABC) *avec* $A\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$ *et* $C\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$, $(a, b, c \neq 0$ *et* $b \neq c)$.

1. *Déterminer l'équation du cercle* $\mathcal{C}$ *circonscrit au triangle* (ABC).
2. *Écrire l'équation cartésienne de la droite* (AB) *et donner un vecteur* $\overrightarrow{n_1}$ *normal à cette droite.*
3. *Écrire l'équation cartésienne de la droite* (AC) *et donner un vecteur* $\overrightarrow{n_2}$ *normal à cette droite.*
4. *On considère un point* $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ *du plan. On note* A' *le projeté orthogonal du point* M *sur la droite* (BC), B' *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* (AC) *et* C' *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* (AB). *Trouver les coordonnées des points* A', B', C'.
5. *Montrer que les points* A', B', C' *sont alignés si et seulement si le point* M *se trouve sur le cercle* $\mathcal{C}$. *Dans ce cas, la droite portant les points* A', B' , C' *et* M *est* ***la droite de Simson*** *du triangle* ABC.

Solution :

1. *L'équation d'un cercle est de la forme* $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. *En traduisant que* $A\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$ *sont sur le cercle, on trouve le système*

$$\begin{cases} a\beta + \gamma & = -a^2 \\ b\alpha + \gamma & = -b^2 \\ c\alpha + \gamma & = -c^2 \end{cases}$$

En résolvant, on en tire α, β, γ et l'équation du cercle :

$$\boxed{\mathcal{C}\ : x^2 + y^2 - (b+c)x - \frac{a^2+bc}{a}y + bc = 0}$$

2. *Si* $M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$*, en notant* A' *le projeté de* M_0 *sur* (BC)*, on a* $\boxed{A'\left|\begin{matrix} x_0 \\ 0 \end{matrix}\right.}$*. La droite* (AC) *a pour équation cartésienne :*

$$(AC)\ : ax + cy - ac = 0$$

et un vecteur normal à cette droite est $\overrightarrow{n_1}\left|\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right.$*. La droite* (AB) *a pour équation cartésienne*

$$(AB)\ : ax + by - ab = 0$$

et un vecteur normal à cette droite est $\overrightarrow{n_2}\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$*.*

3. *Par un calcul d'intersection* ($B' = M_0 + \lambda\overrightarrow{n_1}$) *et* $B' \in (AC)$*, on trouve que* $\boxed{B'\left|\begin{matrix} \dfrac{c(cx_0 - ay_0 + a^2)}{a^2+c^2} \\ \dfrac{a(-cx_0 + ay_0 + c^2)}{a^2+c^2} \end{matrix}\right.}$*.*

   De même, en notant C' *le projeté orthogonal de* M_0 *sur* (AB)*, on trouve que* $\boxed{C'\left|\begin{matrix} \dfrac{b(bx_0 - ay_0 + a^2)}{a^2+c^2} \\ \dfrac{a(-bx_0 + ay_0 + b^2)}{a^2+b^2} \end{matrix}\right.}$

4. *Les trois points* A', B', C' *sont alignés si et seulement si* $\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$*, c'est-à-dire si et seulement si après calculs :*

$$x_0^2 + y_0^2 - (b+c)x_0 - \frac{a^2+bc}{a}y_0 + bc = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si le point M *est sur le cercle circonscrit au triangle* (ABC)*.*

Références